TECHNICAL SCIENCE RESEARCH IN UZBEKISTAN
ISSN (E): 2992-9148 SJIF 2024 = 5.333 ResearchBib Impact Factor: 10.77 / 2025 VOLUME-4, ISSUE-5

ANIQ INTEGRAL YORDAMIDA TEKIS SHAKLNING YUZINI HISOBLASH.

Ibragimova Nigina Jo'rabek qizi
Termiz davlat unversiteti
Fizika-Matematika fakulteti
Matematika ta'lim yo'nalishi talabasi.
ibragimovanigina50@gmail.com

Annotatsiya: Mazkur maqolada matematik tahlilning fundamental Bo'limlaridan biri bo'lgan aniq integralning tekis shakllar yuzasini hisoblashdagi geometrik ahamiyati tadqiq etilgan. Ishda egri chiziqli trapetsiya yuzasini topishning nazariy asoslari , Nyuton-Leybnis formulasining amaliy qo'llanilishi va funksiyalar turli koordinata o'qlarida chegaralanganda hisoblash algoritmlarining o'ziga xos xususiyatlari yoritilgan. Shuningdek , maqolada murakkab integral osti funksiyalarini yechishda integrallash usullarining samaradorligi tahlil qilinib, mavzu doirasida metodik tavsiyalar keltirilgan.

Abstract: This article examines the geometric significance of the definite integral, one of the fundamental branches of mathematical analysis , in calculating the area of plane figures. The paper highlights the theoretical foundations for finding the area of a curvilinear trapezoid , the practical application of the Nyuton-Leybnes formula , and the specific characteristics of calculation algorithms when functions are bounded across different coordinate axes. Additionally, the article analyzes the effectiveness of integration methods in solving complex integrand functions and provides methodological recommendations within the scope of the subject.

Аннотация: В данной статье исследуется геометрическое значение определенного интеграла одного из фундаментальных разделов математического анализа при вычислении площади плоских фигур. В работе освещены теоретические основы нахождения площади криволинейной трапецииб практическое применение формулы Ньютона-Лейбница и особенности алгоритмов вычисления при ограничении функций по различным координатным осям. Также в статье анализируется еффективность. Методов интегрирования при решении сложных подынтегральных функций и приводятся методические рекомендации в рамках данной темы.

Kalit so'zlar: Aniq integral , Nyuton-Leybnis formulasi, Egri chiziqli trapetsiya , Yuza hisoblash , Boshlang'ich funksiya , Gemetrik tatbiq , Matematik tahlil, Riman integrali.

Keywords: Definite integral, Newton–Leibniz formula, curvilinear trapezoid, area calculation, antiderivative (primitive function), geometric application, mathematical analysis, Riemann integral.

Ключевые слова:Определённый интеграл, формула Ньютона–

Лейбница, криволинейная трапеция, вычисление площади, первообразная функция, геометрическое применение, математический анализ, интеграл Римана.

Kirish:Aniq integral yordamida tekis yuzalarni hisoblash kabi matematik usullar nafaqat fundamental bilib, balki mamlakatimizning texnologik va iqtisodiy rivojlanishi uchun ham poydevor hisoblanadi. Zero, Muhtaram Prezidentimiz Shavkat Mirziyoyev o‘zlarining “Yangi O‘zbekiston strategiyasi” asarlarida ta‘kidlaganlaridek:

“Biz mamlakatimizda ilm-fan sohasini rivojlantirish, yoshlarni zamonaviy bilim va ko‘nikmalar bilan qurollantirishni Yangi O‘zbekistonni barpo etishning eng muhim sharti deb bilamiz.

Matematik analiz kursining fundamental tushunchalaridan biri bo‘lgan aniq integral tushunchasi zamonaviy matematikaning ko‘plab amaliy masalalarini yechishda asosiy apparat bo‘lib xizmat qiladi. Integrallash nazariyasi nafaqat nazariy jihatdan , balki geometriya, fizika va muhandislik sohalaridagi murakkab hisob-kitoblarni amalga oshirishda ham cheksiz imkoniyatlar yaratadi. Xususan, aniq integralning geometrik ma‘nosi bevosita tekis shakllarning yuzasini hisoblash masalasi bilan bog‘liqdir.

Qadimda shakllar yuzasini hisoblash faqat to‘g‘ri chiziqli figuralar (uchburchak, to‘rtburchak) bilan chegaralangan bo‘lsa, aniq integralning kashf etilishi ixtiyoriy egri chiziqlar bilan chegaralangan sohalar yuzasini yuqori aniqlikda topish imkonini berdi. Bu jarayonda asosiy o‘rinni egri chiziqli trapetsiya tushunchasi va uning yuzasini hisoblash uchun qo‘llaniladigan Nyuton-Leybnits formulasi egallaydi.

Ushbu maqolaning maqsadi, aniq integral yordamida tekis shakllarning yuzasini hisoblash usullarini tizimlashtirish, turli koordinata sistemalarida berilgan funksiyalar uchun yuzani topish algoritmlarini tahlil qilish va ularning amaliy tatbiqlarini ko‘rsatishdan iborat. Tadqiqot davomida egri chiziqli sohalarni integrallash chegaralarini aniqlash, funksiyalar o‘zaro kesishganda hosil bo‘ladigan sohalar yuzasini hisoblashning o‘ziga xos xususiyatlari batafsil yoritiladi. Bu esa talabalarga va yosh tadqiqotchilarga aniq integralning geometrik mohiyatini chuqurroq anglashga yordam beradi.

Aniq integral tushunchasining shakllanishi fanda nafaqat matematik amallar ko‘lamini kengaytirdi, balki tabiat hodisalarini modellashtirishda yangi davrni boshlab berdi. Tekis shakllar yuzasini hisoblash masalasi integral hisobining eng qadimiy va klassik tatbiqlaridan biri bo‘lsa-da bugungi kunda ham u o‘zining dolzarbligini yo‘qotgani yo‘q. Buning asosiy sababi, zamonaviy texnalogiyalar va kompyuter grafikasi, arxitektura hamda qurilish mexanikasi kabi sohalarda murakkab egri chiziqli konstruksiyalarining parametrlarini aniq hisoblashga bo‘lgan ehtiyojning ortib borayotganidir.

Matematik nuqtai nazardan qaraganda, yuzani integral orqali ifodalash cheksiz kichik miqdorlarni yig‘ish g‘oyasiga asoslanadi. Bundan tashqari, tekis shakllar yuzasini hisoblashda nafaqat Dekart koordinatalar sistemasi, balki qutb koordinatalari va parametrik ko‘rnishda berilgan funksiyalar bilan ishlash ham alohida ahamiyat kasb etadi. Har bir holatda integralning integrallash chegaralarini

ISSN (E): 2992-9148 SJIF 2024 = 5.333 ResearchBib Impact Factor: 10.77 / 2025 VOLUME-4, ISSUE-5

to‘g‘ri aniqlash va funksiya grafigining koordinata o‘qlariga nisbatan joylashuvini tahlil qilish muhim bosqich hisoblanadi.

Aniq integralning ta‘riflari.

Riman integrali. $\mathrm{f(x)}$ funksiya $[a, b]$ kesmada aniqlangan bo‘lsin. $[a, b]$ kesmaning $\mathrm{a} = \mathrm{x}_0 < \mathrm{x}_1 < \mathrm{x}_2 < \mathrm{x}_3 < \ldots < \mathrm{x}_{n-1} < \mathrm{x}_n = \mathrm{b}$ shartni qanoatlantiradigan chekli sondagi nuqtalar sistemasiga $[a, b]$ kesmaning bo‘linishi deyiladi.

Nyuton-Leybnits formulasi. Biz endi aniq integralni hisoblashda keng qo‘llaniladigan Nyuton-Leybnits formulasi bilan tanishamiz.

Agar f(x) funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo‘lib, F(x) funksiya uning $[a, b]$ kesmadagi boshlang ich funksiyasi bo‘lsa, u holda

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Formula o‘rinli bo‘ladi. Bu formula integral hisobning asosiy formulasi yoki Nyuton-Leybnits formulasi deb ataladi.[1]

Isboti. Aytaylik f(x) funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo‘lsin. Ma‘lumki, bu holda $\int_a^b f(x)dx$ integral mavjud bo‘ladi. Endi ushbu $\Phi(\mathrm{x}) = \int_a^x f(t)dt$ funksiyaning f(x) funksiya uchun $[a, b]$ kesmada bo‘shlang‘ich funksiya ekanini ko‘rsatamiz:

$$\Phi'(\mathrm{x}) = \lim_{\Delta \mathrm{x} \to 0} \frac{\phi(x+\Delta \mathrm{x}) - \phi(\mathrm{x})}{\Delta \mathrm{x}} = \lim_{\Delta \mathrm{x} \to 0} \frac{1}{\Delta \mathrm{x}} \int_x^{x+\Delta \mathrm{x}} f(t)dt$$

f(t) funksiya$[x, x + \Delta \mathrm{x}]$ kesmada uzluksiz bo‘lganligi sababli, o‘rta qiymatning birinchi formulasiga ko‘ra

$$\int_x^{x+\Delta \mathrm{x}} f(t)dt = f(x + \theta\Delta \mathrm{x})\Delta \mathrm{x} \qquad (0 < \theta < 1)$$

bo‘ladi. Demak , $\Phi'(\mathrm{x}) = \lim_{\Delta \mathrm{x} \to 0} f(x + \theta\Delta \mathrm{x})$.

Yana f(x) funksiyaning $[a, b]$ kesmada uzluksizligini e‘tiborga olsak, $\forall \mathrm{x} \in [a, b]$ uchun $\Phi'(\mathrm{x}) = \lim_{\Delta \mathrm{x} \to 0} f(x + \theta\Delta \mathrm{x}) = \mathrm{f}(\lim_{\Delta \mathrm{x} \to 0} f(x + \theta\Delta \mathrm{x})) = \mathrm{f(x)}$ bo‘ladi. Bu esa $\Phi(\mathrm{x}) = \int_a^x f(t)dt$ funksiyaning f(x) funksiya uchun $[a, b]$ kesmada boshlang‘ich funksiya ekanini bildiradi. Ma‘lumki, agar f(x) funksiya biror $[a, b]$ kesmada boshlang‘ich funksiyaga ega bo‘lsa, u holda bu funksiya shu kesmada cheksiz ko‘p boshlang‘ich funksiyalarga ega bo‘lib, ular ular bir biridan o‘zgarmas qo‘shiluvchigagina farq qiladi. Shuning uchun f(x) funksiyaning $[a, b]$ kesmadagi ixtiyoriy F(x) boshlang‘ich funksiyasini

[1].M.Xushvaqtov. “Matematik Analiz” Toshkent 2008.

ISSN (E): 2992-9148 SJIF 2024 = 5.333 ResearchBib Impact Factor: 10.77 / 2025 VOLUME-4, ISSUE-5

$$\mathrm{F}(\mathrm{x}) = \int_a^x f(t)dt + C$$

ko‘rnishida yozishimiz mumkin. Bundan

$$\mathrm{F}(\mathrm{b}) = \int_a^b f(t)dt + C, \qquad \mathrm{F}(\mathrm{a}) = \int_a^a f(t)dt + C = 0 + C = C$$

Demak,

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

Bu yerda aniq integralning qiymati itegrallash o‘zgaruvchisining qaysi harf bilan belgilanishiga bog‘liq emasligini e‘tiborga olsak,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

formula hosil bo‘ladi. Teorema isbot qilindi.

Tekis shaklning yuzi tushunchasi. Ma‘lumki, (x, y) juftlik $(\mathrm{x} \in \mathrm{R},\ \mathrm{y} \in \mathrm{R})$ tekislikda nuqtani ifodalaydi.

Koordinatalari ushbu

$$a \le x \le b, \quad c \le y \le d, \qquad (a \in R, b \in R, c \in R, d \in R)$$

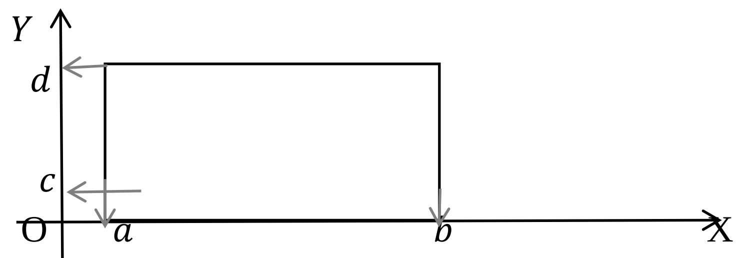
tengsizliklarni qanoatlantiruvchi tekislik nuqtalaridan hosil bo‘lgan D_0 to‘plam:

$D_0 = \{(x, y);\ x \in [a, b], y \in [c, d]\ \}$ to‘g‘ri to‘rtburchak deyiladi. (1-chizma).

Bu to‘rtburchakning tomomlari mos ravishda koordinatalar o‘qiga parallel bo‘ladi. D_0 to‘g‘ri to‘rtburchakning yuzi deb ushbu miqdorga aytiladi.

$$\mu(D_0) = (b - a) \cdot (d - c)$$

miqdorga aytiladi.



1-**ta‘rif.** Agar

$$sup\{\mu(\mathrm{A})\} = inf\{\mu(\mathrm{B})\}$$

bo ‘lsa, Q shakl yuzaga ega deyiladi. Ularning umumiy qiymati Q shaklning yuzi deyiladi va $\mu(\mathrm{Q})$ kabi belgilanadi:

$$\mu(\mathrm{Q}) = sup\{\mu(\mathrm{A})\} = inf\{\mu(\mathrm{B})\}$$

Teorema. Tekis shakl Q yuzaga ega bo‘lishi uchun $\forall \varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday $A(A \subset Q)$ va $B(B \subset Q)$ to‘g‘ri ko‘pburchaklar topilib, ular uchun

$$\mu(\mathrm{B}) - \mu(\mathrm{A}) < \varepsilon$$

ISSN (E): 2992-9148 SJIF 2024 = 5.333 ResearchBib Impact Factor: 10.77 / 2025 VOLUME-4, ISSUE-5

tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarli.[2]

Egri chiziqli trapetsiyaning yuzini hisoblash.

Faraz qilaylik, $f(x) \in C[a,b]$ bo‘lib, $\forall x \in [a,b]$ da $f(x) \geq 0$ bo‘lsin

Yuqoridan $f(x)$ funksiya grafigi, yon tomonlardan $x = a,\ x = b$ vertikal chiziqlar hamda pastdan absissa o‘qi bilan chegaralangan Q shaklni qaraylik. $[a,b]$ segmentni ixtiyoriy

$$P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots., x_n\}, \qquad (a = x_0, x_1, x_2, \ldots., x_n = b)$$

bo‘laklashni olamiz. Bu bo‘laklashning har bir $[x_k, x_{k+1}]$ oralig‘ida

$$inf\{\mathrm{f(x)}\} = M_k, \quad sup\{\mathrm{f(x)}\} = M_k, \quad (k = 0,1,2,3,..,n-1)$$

mavjud bo‘ladi.

Har bir $[x_k, x_{k+1}]$ elementar segmentda asosi $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ bo‘lgan to‘rtburchaklar hosil qilib, quyidagi Darbuning quyi va yuqori yig‘indilarini aniqlaymiz:

$$s = \sum_{k=0}^{n-1} m_k\, x_k, \qquad S = \sum_{k=0}^{n-1} M_k\, \Delta x_k$$

Geometrik nuqtayi nazardan, s yig‘indi - egri chiziqli trapetsiyaning ichiga chizilgan pog‘anali shaklning yuzasini, S yig‘indi esa uning tashqarisiga chizilgan pog‘onali shaklning yuzasini ifodalaydi. Binobarin, ixtiyoriy bo‘laklash uchun izlanayotgan Q yuza quydagi fundamental tengsizlikni qanoatlantirishi lozim:

$$s \leq Q \leq S$$

$$Q = \lim_{\mu \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(з_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)dx$$

Egri chiziqli trapetsiyaning yuzini hisoblash usuli va algoritmi.

Yuqorida keltirilgan ta‘riflardan ko‘rinib turubdiki, egri chiziqli trapetsiyaning yuzi matematik nuqtai nazardan integral yig‘indisining limiti sifatida qaraladi. Biroq amaliy masalalarni yechishda yuzani hisoblash quydagi aniq ketma-ketlikda amalga oshiriladi.

1. Sohani aniqlash: Birinchi navbatda yuzasi hisoblanishi kerak bo‘lgan soha grafikda tasvirlanadi. Bu yerda $f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ kesmada uzluksizligi va musbatligi $(f(x) \geq 0)$ muhim ahamiyatga ega.
2. Integrallash chegaralarini belgilash: Sohani yon tomomlaridan chegaralab turgan $x = a$ va $x = b$ vertikal chiziqlar aniq integralning quyi va yuqori chegaralari bo‘lib xizmat qiladi.
3. Nyuton-Leybnits formulasini qo‘llash:
4. Yuzani hisoblashning eng asosiy usuli-bu boshlang‘ich funksiyani topish orqali Nyuton-Leybnits fotmulasidan foydalanishdir.

Gemetrik tatbiqning amaliy ahamiyati.

Tekis yuzalarni aniq integral yordamida hisoblash usuli faqat nazariy matematika bilan cheklanib qolmaydi. Uning tatbiqlari quydagilarda namoyon bo‘ladi:

---

[2] G.Xudayberganov, A.Vorisov, X.Mansurov, B.Shoimqulov. “Matematik Analizdan Ma‘ruzalar” 1-qisim Toshkent 2010.

ISSN (E): 2992-9148 SJIF 2024 = 5.333 ResearchBib Impact Factor: 10.77 / 2025 VOLUME-4, ISSUE-5

Muhandislik va qurulishda: Murakkab geometrik shakldagi detallar, koʻprik ravoklari yoki binolarning kavisli devorlari yuzasini hisoblashda.
Fizikada: Jisimning bosib oʻtgan yoʻlini (tezlik funksiyasidan integral olib) yoki bajarilgan ishni hisoblashda geometrik talqin sifatida.
Iqtisodiyotda: Turli egri chiziqlar orasidagi yuzani topish orqali ijtimoiy-iqtisodiy koʻrsatgichlarni tahlil qilishda.
Ilm-fan va Davlat taraqqiyoti uygʻunligi.
Ushbu gʻoyadan kelib chiqqan holda, matematik tahlil usullarini oʻrganish va ularni amaliyotga, xususan muhandislik va sanoatda Prezidentimiz tomonidan ilgari surilgan "Uchinchi Renessans" poydevorini qurishda raqobatbardosh kadrlar tayyorlash uchun matematik modellashtirishni mukammal bilish talab etiladi. Davlatimiz rahbarining matematikani rivojlantirish boʻyicha qabul qilgan qarorlari doirasida, aniq integralning geometrik tatbiqlari tadqiq etish yosh olimlarning tahliliy fikrlash qobiliyatini oshiradi. Shunday qilib, tekis yuzalarni aniq integral orqali hisoblashni oʻrganish —bu shunchaki oʻquv jarayoni emas, balki mamlakatimizning intellektual salohiyatini yuksaltirishga qoʻshilgan kichik bir hissadir.
Xulosa:
Ushbu tatqiqot ishimizda biz matematik analizning fundamental boʻlimlaridan biri boʻlgan "Aniq integral yordamida tekis shakllar yuzasini hisoblash" mavzusini nazariy va amaliy jihatdan tahlil qilib chiqdik. Olingan natijalar va oʻrganilgan mabbalar asosida quydagi yakuniy xulosalarni bayon etamiz:
Birinchidan, G.M.Fixtengols kabi akademik manbalarda batafsil yoritilganidek **Nyuton Leybnis formulasi** aniq integralni hisoblashning asosi bo'lib, u geometrik masalalarni tahliliy usulga oʻtkazish imkonini beradi. Ushbu formula orqali tekislikdagi murakkab egri chiziqlar bilan chegaralangan tekis shakllar yuzasini yuqori aniqlikda hisoblashning matematik algoritmi tizimlashtirildi.
Ikkinchidan, maqolada koʻrsatilganidek, tekis yuzalarni hisoblashda aniq integralning tatbiqi nafaqat nazariy matematika, balki muhandislik, qurilish va fizika kabi sohalarda hal qiluvchi ahamiyatga ega.
Uchinchidan, matematika fanini chuqur oʻrganish davlatimizning intellektual salohiyatini oshirishda strategik ahamiyat kasb etadi.
Muhtaram Prezidentimiz **Shavkat Mirziyoyev** taʻkidlaganidek:
"Matematika hamma fanlarning asosi. Bu fanni yaxshi bilgan bola aqlli, keng tafakkurli boʻlib oʻsadi, istalgan sohada muvaffaqiyatli ishlab ketadi."
Darhaqiqat, yurtimizda matematika fanini rivojlantirishga qaratilayotgan yuksak eʻtibor va "**Yangi Oʻzbekiston strategiyasi**" doirasidagi islohotlar biz kabi talaba-yoshlar uchun ilmiy izlanishlar olib borishga keng yoʻl ochmoqda.

ISSN (E): 2992-9148 SJIF 2024 = 5.333 ResearchBib Impact Factor: 10.77 / 2025 VOLUME-4, ISSUE-5

Foydalanilgan adabiyotlar:

1.Sh.M.Mirziyoyev. “Yangi O‘zbekiston strategiyasi” Toshkent 2021.
2.Sh.M.Mirziyoyev. “Milliy taraqqiyot yo‘limizni qat‘iyat bilan davom ettirib, yangi bosqichga ko‘taramiz”. 1-jild Toshkent 2017.
3.T.Azlarov, X.Mansurov. “Matematik Analiz” 1-qisim Toshkent 1994.
4.M.Xushvaqtov. “Matematik Analiz” Toshkent 2008.
5.G.Xudayberganov, A.Vorisov, X.Mansurov, B.Shoimqulov. “Matematik Analizdan Ma‘ruzalar” 1-qisim Toshkent 2010.
6.A.F.Xikmatov, T.T.Turdiyev. “Matematik Analiz” Toshkent 1990.
7.G.M.Fixtengols. Jild-2.
8.S.A.Abdullayev. “Matematik Analiz” Toshkent 2005.