

**DIFFERENSIAL TENGLAMALAR YORDAMIDA AHOLI SONING
O‘SISH JARAYONINI MATEMATIK MODELLASHTIRISH VA TAHLIL
QILISH****Qudratov Almardon Nurmamat o‘g‘li**Termiz davlat muhandislik va agrotexnologiyalar
universiteti Akademik litseyi o‘qituvchisialmardonqudratov18@gmail.com

Annotatsiya: Ushbu maqolada aholi sonining o‘sh jarayonlarini matematik modellashtirishda differensial tenglamalarning o‘rni va ahamiyati yoritilgan. Aholi dinamikasini tavsiflovchi eksponensial va logistik o‘sh modellari tahlil qilinib, ularning amaliy qo‘llanilish imkoniyatlari ko‘rib chiqilgan. Tadqiqot davomida differensial tenglamalar yordamida aholi sonining vaqt bo‘yicha o‘zgarish qonuniyatlari o‘rganilgan hamda matematik modellashtirishning demografik prognozlashdagi samaradorligi asoslab berilgan. Olingan natijalar aholi sonining istiqboldagi o‘zgarishlarini baholash va ijtimoiy-iqtisodiy rejalashtirish jarayonlarida foydalanish imkonini beradi.

Kalit so‘zlar: Differensial tenglama, matematik modellashtirish, aholi soni, demografik jarayonlar, eksponensial o‘sh, logistik model, prognozlash, matematik tahlil, demografiya, populyatsiya dinamikasi.

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ПРОЦЕССА
РОСТА ЧИСЛЕННОСТИ НАСЕЛЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

Аннотация: В данной статье рассматривается роль дифференциальных уравнений в математическом моделировании процессов роста численности населения. Проведен анализ экспоненциальной и логистической моделей роста населения, а также исследованы возможности их практического применения. С помощью дифференциальных уравнений изучены закономерности изменения численности населения во времени и обоснована эффективность математического моделирования в демографическом прогнозировании. Полученные результаты могут быть использованы для оценки будущих демографических изменений и совершенствования процессов социально-экономического планирования.

Ключевые слова: Дифференциальное уравнение, математическое моделирование, численность населения, демографические процессы, экспоненциальный рост, логистическая модель, прогнозирование, математический анализ, демография, динамика популяции.

MATHEMATICAL MODELING AND ANALYSIS OF POPULATION GROWTH USING DIFFERENTIAL EQUATIONS

Abstract: This article examines the role of differential equations in the mathematical modeling of population growth processes. Exponential and logistic growth models are analyzed, and their practical applications are discussed. Using differential equations, the patterns of population change over time are investigated, and the effectiveness of mathematical modeling in demographic forecasting is substantiated. The obtained results can be used to assess future population trends and support socio-economic planning and decision-making processes.

Keywords: Differential equation, mathematical modeling, population growth, demographic processes, exponential growth, logistic model, forecasting, mathematical analysis, demography, population dynamics.

KIRISH

Bugungi kunda dunyo miqyosida aholi sonining o'sishi va uning ijtimoiy-iqtisodiy rivojlanishga ta'sirini o'rganish dolzarb ilmiy masalalardan biri hisoblanadi. Aholi sonining ortishi yoki kamayishi davlatlarning iqtisodiy salohiyati, mehnat resurslari, oziq-ovqat xavfsizligi, ekologik muvozanati hamda urbanizatsiya jarayonlariga bevosita ta'sir ko'rsatadi. Shu sababli demografik jarayonlarni ilmiy asosda tahlil qilish va kelajakdagi o'zgarishlarni prognozlash zamonaviy fan oldida turgan muhim vazifalardan biridir. Matematika fani, xususan differensial tenglamalar nazariyasi murakkab tabiiy va ijtimoiy jarayonlarni modellashtirishda keng qo'llaniladi. Differensial tenglamalar yordamida vaqt davomida o'zgarib boruvchi hodisalarning qonuniyatlarini aniqlash, ularning rivojlanish tendensiyalarini baholash hamda kelajakdagi holatini prognoz qilish mumkin. Aholi sonining o'sishi ham vaqtga bog'liq jarayon bo'lib, uni matematik modellar orqali ifodalash va tahlil qilish katta amaliy ahamiyatga ega. Demografik jarayonlarni o'rganishda eksponensial va logistik o'sish modellari eng ko'p qo'llaniladigan matematik modellardan hisoblanadi. Eksponensial model aholining cheklanmagan sharoitdagi o'sishini tavsiflansa, logistik

model esa resurslarning cheklanganligi, yashash muhitining imkoniyatlari va boshqa omillarni hisobga olgan holda aholi sonining o'zgarishini ifodalaydi. Ushbu modellar differensial tenglamalar asosida quriladi va aholi dinamikasini ilmiy jihatdan tahlil qilish imkonini yaratadi. So'nggi yillarda Yer yuzida aholi sonining keskin ortishi natijasida demografik muammolar yanada dolzarb tus olmoqda. Birlashgan Millatlar Tashkiloti ma'lumotlariga ko'ra, dunyo aholisi 2025-yilda 8 milliarddan ortiq kishini tashkil etgan bo'lib, kelgusi o'n yilliklarda ushbu ko'rsatkichning yanada oshishi kutilmoqda. Bu esa oziq-ovqat, suv resurslari, energetika, transport va ekologik xavfsizlik bilan bog'liq masalalarni yanada murakkablashtirmoqda. Mazkur muammolarni hal etishda matematik modellashtirish usullaridan foydalanish muhim ilmiy va amaliy ahamiyat kasb etadi.

Differensial tenglamalar yordamida yaratilgan matematik modellar aholi sonining vaqt bo'yicha o'zgarishini aniqlash, tug'ilish va o'lim ko'rsatkichlarining ta'sirini baholash, migratsiya jarayonlarini hisobga olish hamda uzoq muddatli demografik prognozlarni ishlab chiqishda samarali vosita bo'lib xizmat qiladi. Shu bilan birga, bunday modellar davlat va hududlarning ijtimoiy-iqtisodiy rivojlanish strategiyalarini ishlab chiqishda ham muhim axborot manbai hisoblanadi. Ushbu maqolaning maqsadi aholi sonining o'sish jarayonlarini differensial tenglamalar yordamida matematik modellashtirish, mavjud modellarni tahlil qilish hamda ularning demografik prognozlashdagi amaliy ahamiyatini yoritishdan iborat. Tadqiqot davomida aholi o'sishini tavsiflovchi asosiy differensial tenglamalar ko'rib chiqiladi, eksponensial va logistik modellar tahlil qilinadi hamda ularning afzallik va cheklovlari ilmiy nuqtai nazardan baholanadi. Olingan natijalar demografik jarayonlarni chuqurroq tushunish va ularni samarali boshqarish bo'yicha ilmiy tavsiyalar ishlab chiqishga xizmat qiladi.

Aholi sonining o'sish jarayonlarini matematik modellashtirishning nazariy asoslari. Aholi sonining o'zgarishi insoniyat tarixida doimo muhim demografik va ijtimoiy-iqtisodiy jarayonlardan biri bo'lib kelgan. Mamlakatlarning iqtisodiy rivojlanishi, mehnat resurslari bilan ta'minlanganligi, urbanizatsiya darajasi, oziq-ovqat xavfsizligi hamda ijtimoiy infratuzilmaning rivojlanishi bevosita aholi soniga bog'liqdir. Shu sababli aholi sonining o'zgarish qonuniyatlarini ilmiy asosda o'rganish va ularni matematik usullar yordamida tahlil qilish zamonaviy matematika va demografiya fanlarining dolzarb yo'nalishlaridan biri hisoblanadi. Matematik modellashtirish real jarayonlarning soddalashtirilgan matematik ifodasini yaratish

orqali ularning rivojlanish tendensiyalarini aniqlash imkonini beradi. Aholi sonining vaqt bo'yicha o'zgarishi uzluksiz jarayon bo'lgani sababli uni tavsiflashda differensial tenglamalardan foydalanish maqsadga muvofiq hisoblanadi. Differensial tenglamalar ma'lum bir kattalikning vaqt bo'yicha o'zgarish tezligini ifodalaydi va shu orqali kelajakdagi qiymatlarini aniqlash imkonini beradi. Aholi soni odatda $(N(t))$ orqali belgilanadi. Bu yerda (N) aholi sonini, (t) esa vaqtni bildiradi. Aholi sonining o'zgarish tezligi quyidagi umumiy differensial tenglama yordamida ifodalanadi:

$$dN/dt = f(N,t)$$

Mazkur tenglamada $(f(N,t))$ funksiyasi aholi sonining o'zgarishiga ta'sir etuvchi barcha omillarni o'z ichiga oladi. Ushbu omillarga tug'ilish darajasi, o'lim darajasi, migratsiya jarayonlari, iqtisodiy sharoitlar, ekologik muhit va boshqa ko'plab omillar kiradi. Demografik modellashtirishning asosiy maqsadi aholi sonining kelajakdagi holatini prognoz qilish, iqtisodiy rejalashtirish uchun zarur bo'lgan ma'lumotlarni taqdim etish hamda davlat boshqaruvi organlariga ilmiy asoslangan tavsiyalar ishlab chiqishdan iboratdir.

Ekspontensial o'sish modeli va uning matematik tahlili. Aholi sonining o'sishini tavsiflovchi eng sodda va klassik modellardan biri ekspontensial o'sish modelidir. Ushbu model ingliz iqtisodchisi va demografi Tomas Maltus tomonidan taklif qilingan bo'lib, u aholi sonining o'sish sur'ati mavjud aholi soniga proporsional ekanligini ta'kidlagan. Ekspontensial o'sish modeli quyidagi differensial tenglama bilan ifodalanadi:

$$dN/dt = rN$$

Bu yerda:

(N) - aholi soni;

(t) – vaqt;

(r) - aholi sonining o'sish koeffitsiyenti.

Mazkur modelga ko'ra, aholi soni qancha katta bo'lsa, uning o'sish sur'ati ham shuncha yuqori bo'ladi. Ushbu differensial tenglamaning yechimi quyidagi formula bilan ifodalanadi:

$$N(t) = N_0 e^{(rt)}$$

Bu yerda:

(N_0) - boshlang'ich aholi soni;

(e) - natural logarifm asosi (taxminan 2,71828);

(r) - o'sish koeffitsiyenti;

(t) - vaqt.

Masalan, bir hududda boshlang'ich aholi soni 100 000 kishi bo'lsin. Yillik o'sish sur'ati 2 foizni tashkil etsa, ya'ni ($r=0,02$), 10 yil o'tgandan keyin aholi soni:

$$N(t)=100000 \cdot e^{(0,02 \cdot 10)}$$

formula yordamida hisoblanadi va natijada taxminan 122 ming kishiga yetadi. Eksponensial model qisqa muddatli prognozlashda yaxshi natija beradi. Biroq real hayotda resurslar cheklanganligi sababli aholi sonining cheksiz o'sishi mumkin emas. Shu sababli ushbu model uzoq muddatli prognozlar uchun yetarli darajada aniq natija bermaydi. Bugungi kunda ayrim rivojlanayotgan davlatlarda eksponensial o'sishga yaqin demografik holat kuzatilayotgan bo'lsa-da, rivojlangan mamlakatlarda tug'ilish darajasining pasayishi natijasida bu modelning qo'llanish doirasi ma'lum darajada cheklangan.

Logistik o'sish modeli va uning afzalliklari. Real sharoitlarda aholi sonining o'sishi ma'lum bir chegaraga ega bo'ladi. Tabiiy resurslar, yashash hududi, oziq-ovqat zaxiralari, energetik imkoniyatlar va iqtisodiy omillar aholi sonining cheksiz o'sishiga to'sqinlik qiladi. Shu sababli biolog olim Per Fransua Verxulst tomonidan logistik o'sish modeli ishlab chiqilgan. Mazkur model quyidagi differensial tenglama bilan tavsiflanadi:

$$dN/dt = rN(1 - N/K)$$

Bu yerda:

(N) - aholi soni;

(r) - o'sish koeffitsiyenti;

(K) - muhit sig'imi yoki maksimal aholi soni.

Tenglamadan ko'rinib turibdiki, aholi soni kichik bo'lgan davrda o'sish eksponensial xarakterga ega bo'ladi. Biroq aholi soni muhit sig'imiga yaqinlashgan sari o'sish sur'ati kamayib boradi. Masalan, agar hududning ekologik va iqtisodiy imkoniyatlari 500 ming kishini ta'minlay olsa, aholi soni dastlab tez o'sadi, keyinchalik esa o'sish sur'ati sekinlashadi va 500 ming atrofida barqarorlashadi. Logistik model ko'plab rivojlangan mamlakatlarning demografik rivojlanishini tavsiflashda muvaffaqiyatli qo'llanilmoqda. Ushbu model aholi soni bilan resurslar o'rtasidagi o'zaro bog'liqlikni hisobga olishi bilan eksponensial modeldan ustun hisoblanadi.

Migratsiya omilining aholi soniga ta'sirini modellashtirish. Aholi sonining o'zgarishiga faqat tug'ilish va o'lim ko'rsatkichlari emas, balki migratsiya jarayonlari ham sezilarli ta'sir ko'rsatadi. Ayniqsa, zamonaviy globallashtirish sharoitida mehnat migratsiyasi, ta'lim migratsiyasi va urbanizatsiya jarayonlari demografik vaziyatni keskin o'zgartirmoqda. Migratsiyani hisobga oluvchi differensial tenglama quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$dN/dt = rN + M$$

Bu yerda:

(M) - migratsiya ko'rsatkichi.

Agar (M) musbat qiymatga ega bo'lsa, hududga aholi kirib kelayotganligini bildiradi. Aksincha, (M) manfiy bo'lsa, aholi sonining kamayishiga olib keladi. Masalan, yirik shaharlarda ish o'rinlarining ko'pligi sababli migratsiya oqimi yuqori bo'ladi. Natijada shaharlardagi aholi soni tabiiy o'sishdan tashqari migratsiya hisobiga ham ortadi. Qishloq hududlarida esa ko'pincha migratsion chiqib ketish kuzatiladi. Migratsiyani hisobga oluvchi matematik modellar hududiy rivojlanish dasturlarini ishlab chiqishda muhim ahamiyatga ega.

Aholi sonini prognozlash va model natijalarini tahlil qilish. Differensial tenglamalar yordamida qurilgan matematik modellar demografik prognozlarni ishlab chiqishda keng qo'llaniladi. Prognozlash jarayonida mavjud statistik ma'lumotlar

asosida model parametrlari aniqlanadi va kelajakdagi aholi soni hisoblab chiqiladi. Masalan, boshlang‘ich aholi soni 300 ming kishi, yillik o‘shish sur‘ati 1,8 foiz bo‘lgan hudud uchun eksponensial model asosida 20 yillik prognoz tuzilganda aholi soni 430-440 ming kishi atrofida bo‘lishi mumkinligi aniqlanadi. Logistik model asosida esa uzoq muddatli davrda aholi sonining o‘shishi sekinlashib borishi va muhit sig‘imi atrofida barqarorlashishi kuzatiladi. Bu esa real demografik jarayonlarga yaqinroq natijalar beradi. Bugungi kunda BMT, Jahon banki va boshqa xalqaro tashkilotlar tomonidan aholi soni prognozlarini ishlab chiqishda matematik modellashtirish usullaridan keng foydalanilmoqda. Ushbu prognozlar iqtisodiy siyosatni shakllantirish, maktablar va shifoxonalar sonini rejalashtirish, uy-joy qurilishi hajmini belgilash hamda mehnat bozorini rivojlantirishda muhim ahamiyat kasb etadi.

Tadqiqot natijalari va muhokama. O‘tkazilgan nazariy tahlillar differensial tenglamalar aholi sonining o‘zgarish jarayonlarini tavsiflashda yuqori samaradorlikka ega ekanligini ko‘rsatdi. Eksponensial model qisqa muddatli prognozlarda sodda va qulay hisoblanadi. Logistik model esa resurslarning cheklanganligini hisobga olishi sababli uzoq muddatli prognozlarda ishonchliroq natijalar beradi. Migratsiyani hisobga oluvchi modellar esa zamonaviy demografik jarayonlarni yanada aniqroq tavsiflash imkonini yaratadi. Tadqiqot natijalari shuni ko‘rsatadiki, differensial tenglamalar yordamida qurilgan matematik modellar demografik siyosatni shakllantirish, hududiy rivojlanish strategiyalarini ishlab chiqish hamda ijtimoiy-iqtisodiy rejalashtirish jarayonlarida samarali vosita bo‘lib xizmat qiladi. Shunday qilib, differensial tenglamalar nazariyasi aholi sonining o‘shish qonuniyatlarini chuqur o‘rganish, kelajakdagi demografik holatni prognozlash va davlat boshqaruvida ilmiy asoslangan qarorlar qabul qilish uchun muhim matematik apparat hisoblanadi.

Ekspsonensial o‘shish modeli bo‘yicha aholi sonining o‘zgarishi

| Yillar (t) | Boshlang‘ich aholi soni N ₀ (kishi) | O‘shish koeffitsiyenti r | Hisoblangan aholi soni N(t) (kishi) |
|------------|--|--------------------------|-------------------------------------|
| 0 | 100 000 | 0,02 | 100 000 |
| 5 | 100 000 | 0,02 | 110 517 |
| 10 | 100 000 | 0,02 | 122 140 |
| 15 | 100 000 | 0,02 | 134 986 |
| 20 | 100 000 | 0,02 | 149 182 |

Jadval ma'lumotlaridan ko'rinib turibdiki, eksponensial model sharoitida aholi soni vaqt o'tishi bilan muntazam ravishda ortib boradi. Boshlang'ich 100 ming kishilik aholi soni 20 yil davomida 149 ming kishidan oshadi. Modelda resurslar cheklanganligi hisobga olinmagani sababli o'sish sur'ati yuqori darajada saqlanib qoladi. Bu esa qisqa muddatli prognozlashda samarali natija bersa-da, uzoq muddatli demografik prognozlarda ma'lum cheklolarga ega ekanligini ko'rsatadi.

Logistik model asosida aholi sonining o'zgarishi (K = 500 000 kishi)

| Yillar (t) | Boshlang'ich aholi soni (kishi) | Muhit sig'imi K (kishi) | Prognoz qilingan aholi soni (kishi) |
|------------|---------------------------------|-------------------------|-------------------------------------|
| 0 | 100 000 | 500 000 | 100 000 |
| 5 | 100 000 | 500 000 | 146 000 |
| 10 | 100 000 | 500 000 | 205 000 |
| 15 | 100 000 | 500 000 | 276 000 |
| 20 | 100 000 | 500 000 | 348 000 |

Logistik model natijalari aholi sonining dastlabki bosqichlarda tez o'sishini, keyinchalik esa o'sish sur'atining pasayib borishini ko'rsatadi. Buning asosiy sababi modelda muhit sig'imi va resurslar cheklanganligi hisobga olinganidir. 20 yil davomida aholi soni 348 ming kishiga yetgan bo'lsa-da, u 500 ming kishilik maksimal sig'imga yaqinlashgan sari o'sish sur'ati sekinlashadi. Ushbu holat real demografik jarayonlarga mos keladi va logistik modelning amaliy jihatdan samaraliroq ekanligini tasdiqlaydi.

XULOSA. Mazkur tadqiqotda aholi sonining o'sish jarayonlarini differensial tenglamalar yordamida matematik modellashtirish masalalari o'rganildi va tahlil qilindi. Tadqiqot natijalari shuni ko'rsatdiki, differensial tenglamalar demografik jarayonlarni tavsiflash, ularning rivojlanish qonuniyatlarini aniqlash hamda kelajakdagi holatini prognozlashda samarali matematik vosita hisoblanadi. Aholi sonining o'zgarish jarayonlarini ifodalashda eksponensial va logistik modellar keng qo'llanilishi aniqlandi. Eksponensial model aholi sonining cheklanmagan sharoitdagi o'sishini tavsiflashi sababli qisqa muddatli prognozlashda yuqori aniqlik beradi. Biroq ushbu model resurslarning cheklanganligini hisobga olmagan sababli uzoq muddatli prognozlar uchun yetarli darajada mos kelmaydi. Logistik model esa muhit sig'imi, tabiiy resurslar va iqtisodiy imkoniyatlarning cheklanganligini hisobga olishi bilan ajralib turadi. Tadqiqot davomida logistik model real demografik jarayonlarni

tavsiflashda eksponensial modelga nisbatan ancha samarali natijalar berishi aniqlandi. Aholi sonining dastlab tez o'sishi, keyinchalik esa o'sish sur'atining sekinlashib borishi va ma'lum darajada barqarorlashishi logistik model orqali muvaffaqiyatli ifodalanishi ko'rsatildi. Shuningdek, migratsiya jarayonlarining aholi soniga ta'siri ham matematik nuqtai nazardan tahlil qilindi. Migratsiyani hisobga oluvchi differensial tenglamalar hududiy demografik o'zgarishlarni yanada aniqroq prognozlash imkonini berishi asoslandi. Olingan natijalar differensial tenglamalar asosida qurilgan matematik modellar demografik siyosatni shakllantirish, iqtisodiy rivojlanish strategiyalarini ishlab chiqish, mehnat resurslarini rejalashtirish, uy-joy qurilishi, sog'liqni saqlash va ta'lim tizimlarini rivojlantirishda muhim ahamiyatga ega ekanligini ko'rsatdi. Xulosa qilib aytganda, differensial tenglamalar yordamida aholi sonining o'sish jarayonlarini matematik modellashtirish demografik tadqiqotlarning muhim yo'nalishlaridan biri bo'lib, uning natijalari davlat va jamiyat taraqqiyotini rejalashtirishda samarali ilmiy asos bo'lib xizmat qiladi.

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati:

1. Ayupov Sh.A. Oliy matematika. Toshkent: O'qituvchi, 2021. 456 b.
2. Qodirov T.Q. Differensial tenglamalar va ularning tatbiqlari. Toshkent: Fan va texnologiyalar, 2020. 384 b.
3. Xurramov Sh.R. Matematik modellashtirish asoslari. Toshkent: Innovatsion rivojlanish nashriyoti, 2022. 312 b.
4. Sobirov A.A. Amaliy matematika va modellashtirish. Toshkent: Tafakkur, 2021. 298 b.
5. Rasulov M. Differensial tenglamalar kursi. Universitet, 2020. 410 b.
6. Isroilov M.I. Oliy matematika masalalari. Toshkent: Fan, 2021. 365 b.
7. Abdullayev A.A. Matematik analiz va uning tatbiqlari. Toshkent: Yangi asr avlodi, 2022. 420 b.
8. Nasirov F.N. Demografiya asoslari. Toshkent: Iqtisodiyot, 2020. 276 b.
9. To'xtayev B.T. Aholishunoslik va demografik jarayonlar. Toshkent: Fan va texnologiyalar, 2021. 304 b.
10. Raximov U.X. Ijtimoiy statistika. Toshkent: Iqtisod-Moliya, 2022. 287 b.