

MATEMATIK MODELLARNI SONLI YECHISHDA ALGORITMLARNING ANIQLIGI VA HISOBLASH SAMARADORLIGINI OSHIRISH

Saidnazarov Zoir Rahmon o'g'li

Surxondaryo viloyati Bandixon tumani 8-maktabda matematika o'qituvchi

saidnazarovzoir070797@gmail.com

Annotatsiya.

Ushbu tezisda matematik modellarni sonli yechishda aniqlik, barqarorlik va hisoblash resurslaridan oqilona foydalanish o'rtasidagi bog'liqlik tahlil qilinadi. Diskretlashtirish xatoligi, yaxlitlash xatoligi, adaptiv qadam tanlash va iteratsion usullarni oldindan shartlash orqali hisoblash samaradorligini oshirish yo'llari yoritilgan. Oddiy differensial tenglama misolida hisoblash xarajatlarini kamaytirish har doim ham qadamni yiriklashtirish bilan bog'liq emasligi asoslanadi. Ish adabiyotlar tahliliga tayangan uslubiy tezis hisoblanadi.

Kalit so'zlar: matematik model, sonli usul, xatolik, barqarorlik, adaptiv qadam, iteratsiya, hisoblash samaradorligi.

Аннотация.

В тезисе рассмотрена взаимосвязь точности, устойчивости и рационального использования вычислительных ресурсов при численном решении математических моделей. Проанализированы погрешности дискретизации и округления, адаптивный выбор шага и повышение эффективности итерационных методов с помощью предобусловливания. На примере обыкновенного дифференциального уравнения показано, что снижение вычислительных затрат не всегда достигается увеличением шага. Работа носит обзорно-методический характер.

Ключевые слова: математическая модель, численный метод, погрешность, устойчивость, адаптивный шаг, итерация, вычислительная эффективность.

Abstract.

This thesis examines the relationship between accuracy, numerical stability, and efficient use of computational resources when solving mathematical models numerically. It discusses discretization and rounding errors, adaptive step-size control, and preconditioning of iterative methods. An ordinary differential equation is used to explain why reducing computational cost does not necessarily mean increasing the step size. The paper is a methodological review grounded in established numerical analysis literature.

Keywords: mathematical model, numerical method, error, stability, adaptive step size, iteration, computational efficiency.

Kirish

Matematik modellashtirish muhandislik, iqtisodiyot, biologiya va texnologik jarayonlarni o'rganishda muhim vositadir. Biroq uzluksiz jarayonni matematik tenglama bilan ifodalash masalani to'liq hal qilmaydi: ko'plab modellar uchun analitik yechim mavjud emas yoki uni amaliy hisoblashda qo'llash qiyin. Shu sababli differensial tenglamalar, chiziqli algebraik sistemalar va optimallashtirish masalalarini sonli yechish zarurati ortmoqda. Zamonaviy hisoblash tizimlarida asosiy mezon faqat tez natija olish emas, balki belgilangan aniqlik talabini imkon qadar kam vaqt va xotira sarfi bilan ta'minlashdir (Higham, 2002).

Sonli algoritm sifati uch o'zaro bog'liq ko'rsatkich bilan baholanadi: yechim xatoligi, hisoblashning barqarorligi va resurs sarfi. Bir ko'rsatkichni yaxshilash boshqasiga salbiy ta'sir qilishi mumkin. Masalan, diskretlashtirish qadamini haddan tashqari kichraytirish hisoblash sonini ko'paytiradi, ayrim hollarda esa yaxlitlash xatoliklarining to'planishini kuchaytiradi. Shu bois algoritm tanlash modelning xususiyatlari va qo'yilgan tolerantlikka asoslanishi lozim.

Asosiy qism

Aniqlikni oshirishning dastlabki sharti xatolik manbalarini ajratib baholashdir. Umumiy xatolik modelning real jarayondan farqi, diskretlashtirish xatoligi va kompyuter arifmetikasidagi yaxlitlash ta'siridan shakllanadi. Diskretlashtirish xatoligi usul tartibi bilan bog'liq bo'lib, masalan, mos silliqlik shartlarida birinchi tartibli usul uchun global xatolik $O(h)$, ikkinchi tartibli usul uchun $O(h^2)$ ko'rinishida kamayadi. Biroq yuqori tartib hamma model uchun birdek foydali emas: yechim silliq bo'lmagan yoki qattiq (stiff) masalalarda barqarorlik cheklovi ustun kelishi mumkin (Hairer et al., 1993).

Buni $y'(t)=-y(t)$, $y(0)=1$, $0 \leq t \leq 1$ boshlang'ich masala misolida ko'rish mumkin. Analitik yechim $y(t)=e^{-t}$. Oshkor Eyler usuli $y_{n+1}=y_n-hy_n$ formuladan foydalanadi; uning barqarorligi uchun ushbu masalada $0 < h < 2$ sharti talab etiladi. $h=0,1$ tanlanganda $t=1$ dagi sonli yechim $(0,9)^{10} \approx 0,348678$, aniq yechim esa $e^{-1} \approx 0,367879$ bo'ladi. Absolyut xatolik taxminan $0,019201$ ni tashkil etadi. Bu qiymatlar aniq formulalardan hisoblangan ko'rgazmali misol bo'lib, mustaqil tajriba natijasi emas.

Aniqlikni oshirish faqat qadamni kamaytirish bilangina cheklanmaydi. Ikkinchi va undan yuqori tartibli Runge–Kutta usullari bir qadamda ko'proq funksiya hisoblashni talab qilishi mumkin, biroq kerakli tolerantlikka kamroq qadam bilan erishishi ehtimoli mavjud. Shu sababli usullarni faqat qadamlar soni bo'yicha emas, balki funksiya chaqiruvlari, umumiy bajarilish vaqti va yakuniy xatolik bo'yicha qiyoslash maqsadga muvofiq. Adaptiv qadam tanlashda algoritm mahalliy xatolik bahosiga qarab h ni qisqartiradi yoki kattalashtiradi; keskin o'zgarish joylarida mayda, silliq oraliqlarda esa yirikroq qadam ishlatiladi (Hairer et al., 1993).

Yirik o'lchamli matematik modellar ko'pincha $Ax=b$ ko'rinishidagi siyrak chiziqli sistemalariga olib keladi. Bu yerda to'g'ridan-to'g'ri yechish usullarining xotira xarajati ortishi mumkin, iteratsion usullar esa siyrak tuzilmani saqlagan holda hisoblashga imkon beradi. Biroq iteratsiyalar soni matritsaning shartlanganligiga kuchli bog'liq. Oldindan shartlash (preconditioning) orqali dastlabki sistemaga ekvivalent, lekin iteratsion yaqinlashish uchun qulayroq sistema hosil qilinadi. CG usuli simmetrik musbat aniqlangan matritsalariga, GMRES esa kengroq nosimmetrik sistemalariga tatbiq etiladi (Saad, 2003).

Hisoblash samaradorligini baholashda faqat protsessor vaqti yetarli emas. Bir xil apparat vositasi, dasturiy muhit, boshlang'ich shart va tolerantlikda o'lgangan bajarilish vaqti, maksimal xotira sarfi, iteratsiya soni hamda yechimning qoldiq normasi birgalikda qayd etilishi kerak. Ayniqsa qoldiq normasi kichik bo'lishi har doim yechim xatoligi ham kichikligini anglatmaydi: yomon shartlangan matritsalarida bu farq sezilarli bo'lishi mumkin (Higham, 2002).

Xulosa

Matematik modellarni sonli yechishda samaradorlikni oshirishning asosiy yo'li aniqlik va hisoblash xarajati o'rtasidagi muvozanatni boshqarishdir. Buning uchun masalaga mos barqaror sonli usul tanlash, mahalliy xatolikni nazorat qiluvchi adaptiv qadam mexanizmlaridan foydalanish hamda siyrak chiziqli sistemalarda oldindan shartlangan iteratsion algoritmlarni qo'llash maqsadga muvofiq. Usullarni solishtirishda bir xil aniqlik mezonlari va takrorlanadigan hisoblash sharoitlaridan foydalanish natijalar

ishonchliligini oshiradi. Kelgusi amaliy tadqiqotlarda turli murakkablikdagi modellar uchun «xatolik–vaqt–xotira» bog‘lanishini tajriba asosida o‘lchash zarur.

Foydalanilgan adabiyotlar (APA 7)

1. Hairer, E., Nørsett, S. P., & Wanner, G. (1993). Solving ordinary differential equations I: Nonstiff problems (2nd ed.). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-78862-1>
2. Higham, N. J. (2002). Accuracy and stability of numerical algorithms (2nd ed.). Society for Industrial and Applied Mathematics. <https://doi.org/10.1137/1.9780898718027>
3. Saad, Y. (2003). Iterative methods for sparse linear systems (2nd ed.). Society for Industrial and Applied Mathematics. <https://doi.org/10.1137/1.9780898718003>